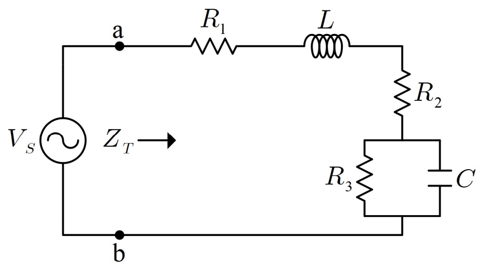
[제1문]

다음은 주파수 f[Hz]로 구동되는 교류 회로이다. 주어진 물음에 답하시오.



(1) 단자 a, b에서 바라본 회로 전체의 등가 임피던스를 Z_T라 할 때, 이 Z_T가 코일(L)의 영향을 받지 않는 C 값[1]을 구하시오. (10점)

(2) 이 회로에서 구한 C 값이 존재하기 위한 전원 V_s의 동작 주파수 f[Hz]의 조건을 구하시오. (10점)

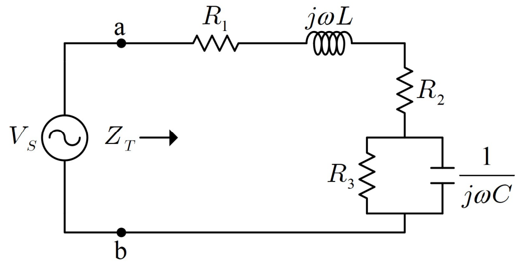
(3) 문항 (1)과 (2)의 조건을 만족할 때 단자 a, b에서 바라본 회로 전체의 등가 임피던스 Z_T를 구하시오. (10점)

1) 일반적으로 이 문장의 의미는 '적당한 커패시턴스의 값을 하나 정하면 코일의 인덕턴스에 관계없이 Z_T가 정해진다.'는 것인데 본 설문에서는 L의 값에 대하여 C의 값이 달라지므로 출제오류라고 볼 여지도 있다. 그런데 설문 (2), (3)에서 설문 (1)의 논리적 흐름을 일관적으로 유지하면서 풀이가 이루어지므로 출제오류라고 하기 보다는 해당 문장을 'Z_T의 허수부가 0'일 조건으로 받아들이는 것이 자연스럽다.

[풀이]

Ⅰ. 설문(1)

다음 페이저회로에서$(\omega = 2\pi f L)$



$$Z_T = R_1 + j\omega L + R_2 + \left(R_3 \| \frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$= R_1 + R_2 + \frac{R_3}{C^2 R_3^2 \omega^2 + 1} + j\omega\left(L - \frac{CR_3^2}{C^2 R_3^2 \omega^2 + 1}\right)[\Omega]$$

에서 코일 L의 영향을 받지 않기 위해서는 Z_T의 허수부가 0이어야 한다.

$\omega > 0$이므로 $\mathrm{Im}[Z_T] = 0$에서

$$L = \frac{CR_3^2}{C^2 R_3^2 \omega^2 + 1}$$

$$R_3^2 \omega^2 L C^2 + L = CR_3^2$$

$$R_3^2 \omega^2 L C^2 - CR_3^2 + L = 0$$

$$C = \frac{R_3^2 \pm \sqrt{R_3^4 - 4R_3^2 \omega^2 L^2}}{2R_3^2 \omega^2 L}$$

$$= \frac{R_3^2 \pm R_3\sqrt{R_3^2 - 4\omega^2 L^2}}{2R_3^2 \omega^2 L}$$

$$= \frac{R_3 \pm \sqrt{R_3^2 - 4\omega^2 L^2}}{2R_3 \omega^2 L}[\mathrm{F}]$$

따라서 $C = \frac{R_3 + \sqrt{R_3^2 - 16\pi^2 f^2 L^2}}{8\pi^2 R_3 f^2 L}[\mathrm{F}]$ 또는 $C = \frac{R_3 - \sqrt{R_3^2 - 16\pi^2 f^2 L^2}}{8\pi^2 R_3 f^2 L}[\mathrm{F}]$

Ⅱ. 설문(2)

$C = \frac{R_3 \pm \sqrt{R_3^2 - 16\pi^2 f^2 L^2}}{8\pi^2 R_3 f^2 L}[\mathrm{F}]$에서 C 값이 존재하려면 근호 안의 부호가 0 이상이어야 한다. $R_3^2 - 16\pi^2 f^2 L^2 \geq 0$에서 $f^2 \leq \frac{R_3^2}{16\pi^2 L^2}$이므로 구하는 조건은 $f \leq \frac{R_3}{4\pi L}[\mathrm{Hz}]$

Ⅲ. 설문(3)

$C=\dfrac{R_3 \pm \sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}{2R_3\omega^2L}$[F]일 때, $\mathrm{Im}[Z_T]=0$이고

$$C^2R_3^2\omega^2+1=\left(\frac{R_3 \pm \sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}{2R_3\omega^2L}\right)^2\times R_3^2\omega^2+1$$

$$=\frac{R_3^2+R_3^2-4\omega^2L^2\pm 2R_3\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}{4R_3^2\omega^4L^2}\times R_3^2\omega^2+1$$

$$=\frac{2R_3^2-4\omega^2L^2\pm 2R_3\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}{4\omega^2L^2}+1$$

$$=\frac{2R_3^2-4\omega^2L^2\pm 2R_3\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}+4\omega^2L^2}{4\omega^2L^2}$$

$$=\frac{2R_3^2\pm 2R_3\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}{4\omega^2L^2}$$

$$=\frac{R_3^2\pm R_3\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}{2\omega^2L^2}$$

이므로

$$Z_T=R_1+R_2+\frac{R_3}{C^2R_3^2\omega^2+1}+j\omega\left(L-\frac{CR_3^2}{C^2R_3^2\omega^2+1}\right)$$

$$=R_1+R_2+R_3\times\frac{2\omega^2L^2}{R_3^2\pm R_3\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}$$

$$=R_1+R_2+\frac{2\omega^2L^2}{R_3\pm\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}$$

$$=R_1+R_2+\frac{2\omega^2L^2\left(R_3\mp\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}\right)}{\left(R_3\pm\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}\right)\left(R_3\mp\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}\right)}$$

$$=R_1+R_2+\frac{2\omega^2L^2\left(R_3\mp\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}\right)}{R_3^2-R_3^2+4\omega^2L^2}$$

$$=R_1+R_2+\frac{2\omega^2L^2\left(R_3\mp\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}\right)}{4\omega^2L^2}$$

$$=R_1+R_2+\frac{R_3\mp\sqrt{R_3^2-4\omega^2L^2}}{2}[\Omega]$$

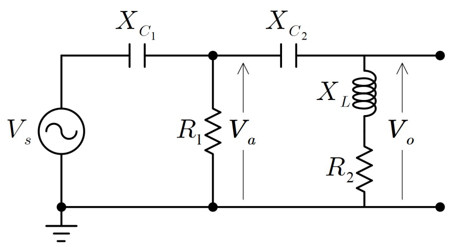
따라서

$C=\dfrac{R_3+\sqrt{R_3^2-16\pi^2f^2L^2}}{8\pi^2R_3f^2L}$[F]일 때, $Z_T=R_1+R_2+\dfrac{R_3-\sqrt{R_3^2-16\pi^2f^2L^2}}{2}[\Omega]$

$C=\dfrac{R_3-\sqrt{R_3^2-16\pi^2f^2L^2}}{8\pi^2R_3f^2L}$[F]일 때, $Z_T=R_1+R_2+\dfrac{R_3+\sqrt{R_3^2-16\pi^2f^2L^2}}{2}[\Omega]$

[제2문]

다음 교류회로에서 $\boldsymbol{V_s} = 30\angle 0^\circ[\mathrm{V}]$(전압은 실효치임)이고 $R_1 = 10[\Omega]$, $R_2 = 5[\Omega]$, $X_{C_1} = X_{C_2} = 2[\Omega]$, $X_L = 5[\Omega]$일 때 다음 각 페이저(Phasor) 전압을 구하시오. (단, 전압의 실효치는 소수점 셋째 자리에서 반올림하고, 위상은 소수점 둘째 자리에서 반올림하시오.)



(1) 전압 $\boldsymbol{V_s}[\mathrm{V}]$ (7점)

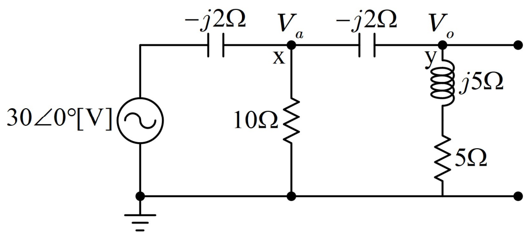
(2) 전압 $\boldsymbol{V_o}[\mathrm{V}]$ (3점)

(3) 전압 $\boldsymbol{V_s}$, $\boldsymbol{V_a}$, $\boldsymbol{V_o}$를 크기순(작은 것부터)으로 표시하고 이러한 전압 특성이 나타나는 이유를 설명하시오. (10점)

[풀이]

Ⅰ. 설문(1), 설문(2)

다음 페이저회로에서



(1) 마디 x에 KCL을 적용하면 $\dfrac{V_a - 30}{-j2} + \dfrac{V_a}{10} + \dfrac{V_a - V_o}{-j2} = 0$

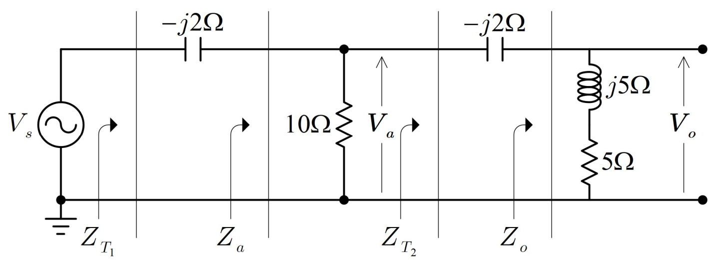
(2) 마디 y에 KCL을 적용하면 $\dfrac{V_o - V_a}{-j2} + \dfrac{V_o}{j5+5} = 0$

(3) 상기 (1), (2)의 식을 연립하면

$$V_a = \frac{375 + j325}{14} = 31.24\angle 31.0^o[\mathrm{V}]\mathrm{rms},\ V_o = \frac{375 + j375}{14} = 37.88\angle 45^o[\mathrm{V}]\mathrm{rms}$$

Ⅱ. 설문(3)

설문 (1), (2)의 결과로부터 전압 V_s, V_a, V_o를 크기가 작은 것부터 나열하면 V_s, V_a, V_o 인데 각 단의 입력전압보다 출력전압의 크기가 큰 이유는 각 단의 입력 임피던스의 크기보다 출력 임피던스의 크기가 크기 때문이다. 구체적으로는 각 단의 출력 임피던스에 포함된 유도성 리액턴스를 용량성 리액턴스$\left(X_{C_1}, X_{C_2}\right)$가 부분적으로 상쇄시켜 입력임피던스의 크기를 작게 만든다.



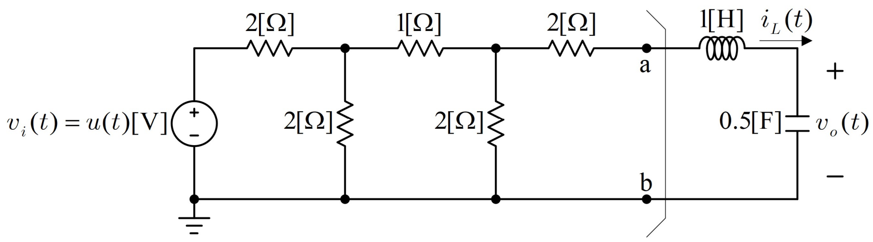
상기 회로에서 $\left|Z_o\right| = |5 + j5| = 7.07[\Omega]$, $\left|Z_{T_2}\right| = \left|-j2 + Z_o\right| = 5.83[\Omega]$이고 $V_o = \dfrac{Z_o}{Z_{T_2}} V_a$에서 $\left|\dfrac{V_o}{V_a}\right| = \dfrac{\left|Z_o\right|}{\left|Z_{T_2}\right|} = \dfrac{7.07}{5.83} > 1$이므로 $\left|V_o\right| > \left|V_a\right|$

또한 $\left|Z_a\right| = |10 \| (-j2 + j5 + 5)| = \left|\dfrac{140}{39} + j\dfrac{50}{39}\right| = 3.81[\Omega]$, $\left|Z_{T_1}\right| = \left|-j2 + Z_a\right| = 3.66[\Omega]$이고

$V_a = \dfrac{Z_a}{Z_{T_1}} V_s$에서 $\left|\dfrac{V_a}{V_s}\right| = \dfrac{\left|Z_a\right|}{\left|Z_{T_1}\right|} = \dfrac{3.81}{3.66} > 1$이므로 $\left|V_a\right| > \left|V_s\right|$

[제3문]

다음 회로에 대하여 물음에 답하시오. 단, 입력 전압은 단위 계단 함수 파형을 갖는다.



(1) 시간 $t > 0$ 구간에서 두 단자 a−b 좌측의 회로에 대한 테브냉 등가회로(Thevenin equivalent circuit)를 구하고, 커패시터의 초기 전압과 인덕터의 초기 전류 값을 구하시오. (10점)

(2) 회로에서 전달함수(출력 전압 $v_o(t)$와 입력 전압 $v_i(t)$에 대한 라플라스변환의 비)를 구하고, 이를 이용하여 출력 전압에 대한 라플라스 변환과 그 역변환을 통한 시간함수 표현을 각각 구하시오. (10점)

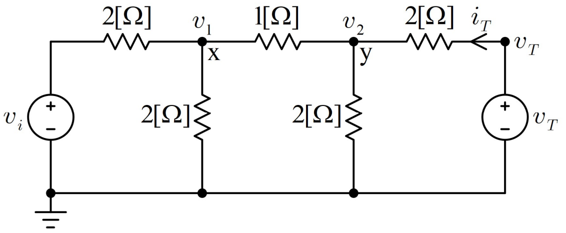
(3) 회로의 출력 중 자연 응답 성분의 부족 감쇠(under−damping), 과 감쇠(over−damping) 또는 임계 감쇠(critically damped) 여부를 판별하고, 그에 따른 감쇠 특성에 관하여 논하시오. (5점)

(4) 만일 커패시터의 커패시턴스 값을 변경시켜서 자연 응답 성분이 더욱 빨리 감쇠하도록 만들려면 그 값을 어떻게 변경시켜야 하는지에 관하여 논하시오. (단, 이때에 감쇠 진동(damped oscillation)을 발생시키지 않아야 한다.) (5점)

[풀이]

Ⅰ. 설문(1)

1. 다음 회로에서

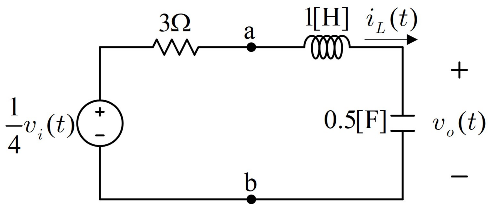


(1) 마디 x에 KCL을 적용하면 $\dfrac{v_1 - v_i}{2} + \dfrac{v_1}{2} + \dfrac{v_1 - v_2}{1} = 0$

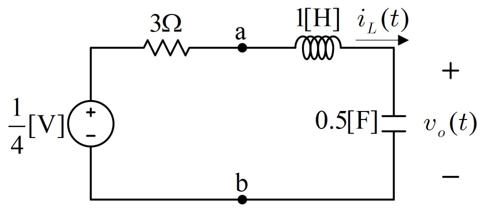
(2) 마디 y에 KCL을 적용하면 $\dfrac{v_2 - v_1}{1} + \dfrac{v_2}{2} = i_T$

(3) $i_T = \dfrac{v_T - v_2}{2}$

(4) 상기 (1)~(3)의 식을 연립하면 $v_T = 3i_T + \dfrac{1}{4}v_i$이므로 단자 a－b 좌측의 회로에 대한 테브냉 등가저항 $R_{Th} = 3[\Omega]$, 테브냉 등가전압 $v_{Th} = \dfrac{1}{4}v_i[\mathrm{V}]$이다.



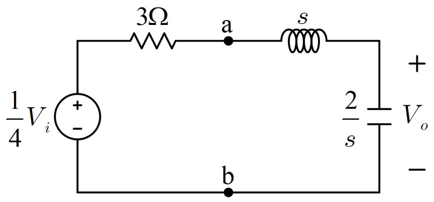
2. $t > 0$에서 $v_{Th} = \dfrac{1}{4}u(t) = \dfrac{1}{4}[\mathrm{V}]$이므로 a－b 단자 좌측의 회로에 대한 테브냉 등가회로는 다음과 같다.



3. $t < 0$에서 $v_{Th} = \dfrac{1}{4}u(t) = 0[\mathrm{V}]$이므로 인덕터, 커패시터에는 에너지가 공급되지 않는다. 따라서 $i_L(0-) = 0[\mathrm{A}]$, $v_o(0-) = 0[\mathrm{V}]$

Ⅱ. 설문(2)

1. 다음 라플라스변환회로에서 전압분배법칙에 의해 $V_o = \dfrac{\frac{2}{s}}{3+s+\frac{2}{s}} \times \dfrac{1}{4} V_i$이므로 전달함수는 $H(s) = \dfrac{V_o}{V_i} = \dfrac{2}{s^2+3s+2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2(s+1)(s+2)}$



2. $V_i = \mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}$ 이므로 $V_o = H(s)V_i = \dfrac{1}{2s(s+1)(s+2)}$

3. $V_o = \dfrac{1}{2(s+2)} - \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{2s}$ 이므로 $v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_o] = \left(\dfrac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \dfrac{1}{2}\right)u(t)[\mathrm{V}]$

Ⅲ. 설문(3)

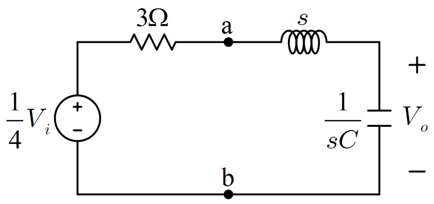
1. 감쇠(damping)란 초기 저장에너지의 점진적 손실로 자연응답이 0으로 소멸함을 뜻한다. 출력 v_o의 자연응답성분은 v_o에 관한 미분방정식의 특성근에 의해 결정되는데 v_o에 관한 미분방정식의 특성근은 일반적으로 v_o를 출력으로 하는 전달함수의 극점과 동일하므로 설문 (2)에서 구한 전달함수로부터 v_o의 자연응답성분의 감쇠특성을 판별할 수 있다.

2. $H(s) = \dfrac{1}{2(s+1)(s+2)}$ 에서 극점은 $s = -1,\ -2$이므로 $v_o(t)$의 자연응답은 e^{-t}와 e^{-2t}의 두 요소로 이루어져 있다. 즉, $v_o(t)$의 자연응답은 지수함수적으로 줄어드는 두 항을 가지므로 과감쇠(over-damping)이다. 과감쇠에서는 고유응답의 각 항이 진동을 수반하지 않고 안정적으로 진폭을 잃는다.

Ⅳ. 설문(4)

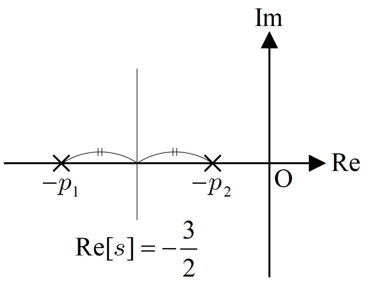
1. 회로의 커패시턴스를 C로 대체하고 전달함수를 구하면 $V_o = \dfrac{\frac{1}{sC}}{3+s+\frac{1}{sC}} \times \dfrac{1}{4} V_i$이므로

전달함수는 $H(s) = \dfrac{V_o}{V_i} = \dfrac{1}{4(s^2C+3sC+1)} = \dfrac{1}{4C\left(s^2+3s+\frac{1}{C}\right)}$ 이다.



2. 자연응답성분이 감쇠진동을 발생시키지 않으므로 전달함수의 두 극점은 실수이다. 이차 방정식 $s^2+3s+\dfrac{1}{C}=0$의 두 실근의 합은 -3이고 곱은 $\dfrac{1}{C}>0$이므로 두 실근은 모두 음수이고 그 평균값은 $-\dfrac{3}{2}$이다.

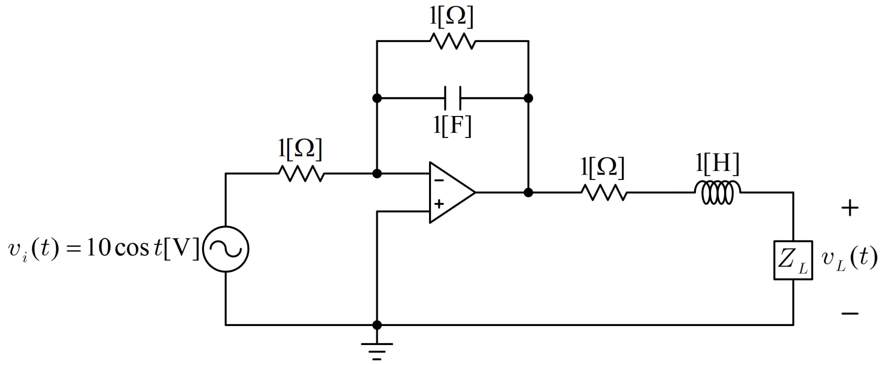
3. 방정식 $s^2+3s+\dfrac{1}{C}=0$의 두 실근을 $-p_1$, $-p_2(p_1>p_2)$라 하면 자연응답은 e^{-p_1t}와 e^{-p_2t}로 구성되므로 $p_1=\dfrac{1}{\tau_1}$, $p_2=\dfrac{1}{\tau_2}$와 같이 p_1, p_2에 대응하는 일차회로의 시상수 τ_1, τ_2를 생각할 수 있다. 따라서 $v_o(t)$의 자연응답의 감쇠여부는 τ_1, τ_2 중에서 큰 것(r_2)에 의해 (p_1, p_2 중에서 작은 것)에 의해 결정되는데 $-p_1<-\dfrac{3}{2}<-p_2$에서 $\tau_1<\dfrac{2}{3}<\tau_2$이고 $5\tau_2>\dfrac{10}{3}$[sec]이므로 과감쇠의 경우 자연응답은 $\dfrac{10}{3}$[sec]가 지나서 소멸한다.



4. 방정식 $s^2+3s+\dfrac{1}{C}=0$이 중근을 가질 때(임계감쇠) $D=9-\dfrac{4}{C}=0$에서 $C=\dfrac{4}{9}$[F]이고 이때 극점은 $s^2+3s+\dfrac{9}{4}=\left(s+\dfrac{3}{2}\right)^2=0$에서 $s=-\dfrac{3}{2}$이므로 자연응답은 $e^{-\frac{3}{2}t}$와 $te^{-\frac{3}{2}t}$로 구성된다. 시상수 $\tau=\dfrac{2}{3}$[sec]인 일차회로의 자연응답은 $\dfrac{10}{3}$[sec]에서 소멸한 것으로 볼 수 있으므로 감쇠 진동을 발생시키지 않는 범위에서 자연응답성분이 가장 빨리 감쇠하도록 만들려면 커패시턴스를 $C=\dfrac{4}{9}$[F]으로 변경시켜야 한다.

[제4문]

다음 연산증폭기 회로에서 연산증폭기는 이상적인 연산 증폭 특성을 갖는다고 가정하고 물음에 답하시오.



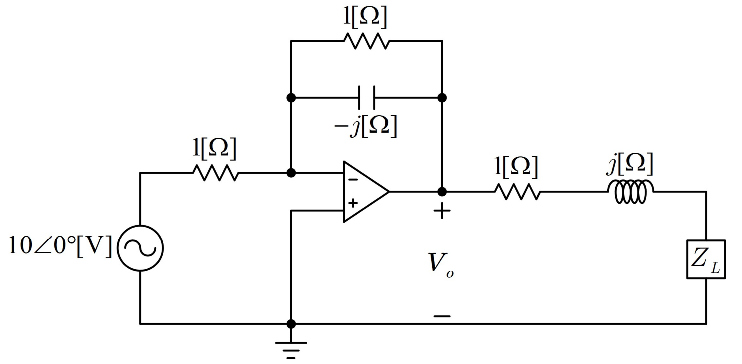
(1) 페이저(Phasor) 회로도를 도시하고, 부하 Z_L을 제외한 나머지 회로의 테브냉 등가 회로(Thevenin equivalent circuit)를 구하시오. (6점)

(2) 부하에서 최대의 평균전력을 소모할 수 있도록 부하의 임피던스를 결정하여 회로를 구성하시오. (단, 2[Ω] 저항과 0.5[F] 커패시터들을 결합해서 회로를 구성하되, 소자의 개수를 가장 적게 사용하여야 한다.) (6점)

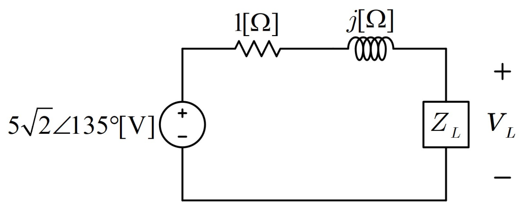
(3) 부하에서 소모될 수 있는 최대의 평균전력을 계산하시오. 그리고 이때 부하에 걸리는 전압 파형(시간 함수) $v_L(t)$를 구하시오. (8점)

[풀이]

Ⅰ. 설문(1)

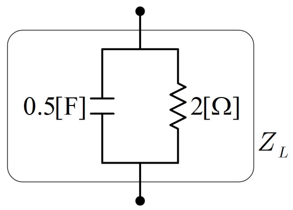


상기 페이저회로에서 $\boldsymbol{V_o} = -\dfrac{(1\|-j)}{1}\times 10\angle 0^{\circ} = -5+j5 = 5\sqrt{2}\angle 135^{\circ}[\mathrm{V}]$이므로 Z_L에서 바라본 테브냉 등가전압 $\boldsymbol{V_{Th}} = \boldsymbol{V_o} = 5\sqrt{2}\angle 135^{\circ}[\mathrm{V}]$, 등가 임피던스 $Z_{Th} = 1+j[\Omega]$이다.



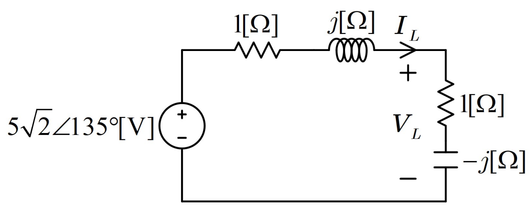
Ⅱ. 설문(2)

최대전력전달조건에 의해 $Z_L = Z_{Th}^{*} = (1+j)^{*} = 1-j[\Omega]$일 때, Z_L에 최대전력이 전달된다. $\dfrac{1}{Z_L} = \dfrac{1}{1-j} = \dfrac{1+j}{2} = \dfrac{1}{2}+j\dfrac{1}{2}[\mathrm{S}]$이고 $2[\Omega]$ 저항, $0.5[\mathrm{F}]$ 커패시터의 어드미턴스는 각각 $\dfrac{1}{2}[\mathrm{S}]$, $j\dfrac{1}{2}[\mathrm{S}]$이므로 다음과 같이 두 소자를 병렬연결 하면 Z_L을 구성할 수 있다.



Ⅲ. 설문(3)

1. 다음 회로에서 부하전류 $I_L = \dfrac{5\sqrt{2}\angle 135^o}{1+j+1-j} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\angle 135^o$[A]이므로 부하에 전달되는 최대전력은 $\dfrac{1}{2}\times 1\times |I_L|^2 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{25}{2} = \dfrac{25}{4} = 6.25$[W]



2. $V_L = (1-j)I_L = \sqrt{2}\angle -45^o \times \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\angle 135^o = 5\angle 90^o$[V]이므로

   $v_L(t) = 5\cos(t+90^o) = -5\sin t$[V]